

*Dérivées de forme, couches minces et
domaines aléatoires.*

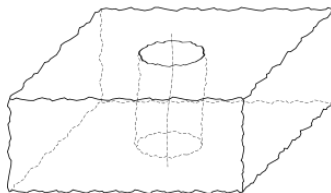
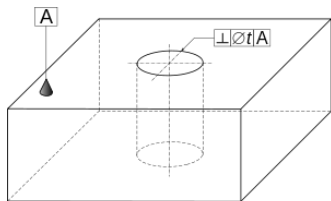
Marc DAMBRINE



Helmut HARBRECHT (Basel) et Bénédicte PUIG (Pau)

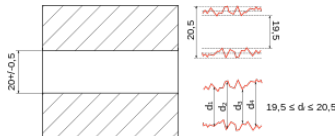
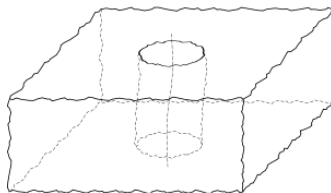
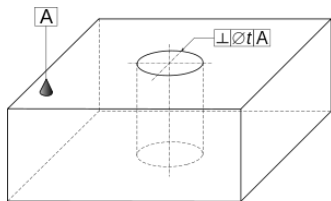
Motivation : les tolérances de fabrication, d'usure ...

Les géométries effectives des pièces mécaniques ne sont pas celle planifiées mais en sont proches :



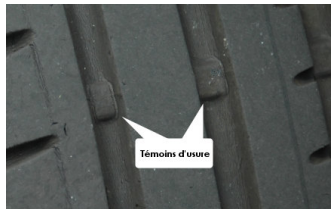
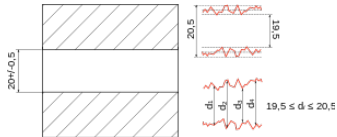
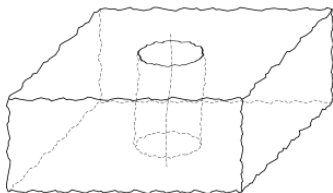
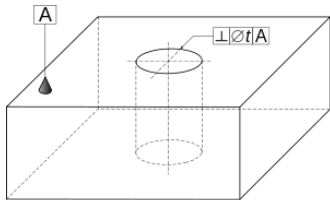
Motivation : les tolérances de fabrication, d'usure ...

Les géométries effectives des pièces mécaniques ne sont pas celle planifiées mais en sont proches :



Motivation : les tolérances de fabrication, d'usure ...

Les géométries effectives des pièces mécaniques ne sont pas celle planifiées mais en sont proches :



Modèle géométrique : les bords réels sont des graphes au dessus du bord théorique

Le bord du "vrai" domaine ∂D_{true} peut être vu comme le graphe d'une fonction scalaire X définie sur $\partial D_{nominal}$

$$\partial D_{true} = \{x + X(x)\mathbf{n}(x); x \in \partial D_{nominal}\}$$

où $\mathbf{n}(x)$ désigne la normale unité dirigée vers extérieur en un point x de $\partial D_{nominal}$.

Modèle géométrique : les bords réels sont des graphes au dessus du bord théorique

Le bord du "vrai" domaine ∂D_{true} peut être vu comme le graphe d'une fonction scalaire X définie sur $\partial D_{nominal}$

$$\partial D_{true} = \{x + \varepsilon X(x)\mathbf{n}(x); x \in \partial D_{nominal}\}$$

où $\mathbf{n}(x)$ désigne la normale unité dirigée vers extérieur en un point x de $\partial D_{nominal}$.

Modèle géométrique : les bords réels sont des graphes au dessus du bord théorique

Le bord du "vrai" domaine ∂D_{true} peut être vu comme le graphe d'une fonction scalaire X définie sur $\partial D_{nominal}$

$$\partial D_{true}(\omega) = \{x + \varepsilon X(x, \omega) \mathbf{n}(x); x \in \partial D_{nominal}\}$$

où $\mathbf{n}(x)$ désigne la normale unité dirigée vers extérieur en un point x de $\partial D_{nominal}$.

Question 1:

calculer une quantité d'intérêt

Notre objectif

Puisque le domaine de calcul est aléatoire, la solution d'un problème aux limites est elle aussi aléatoire et les quantités d'intérêt physique le devienne aussi.

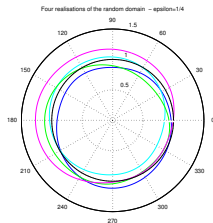
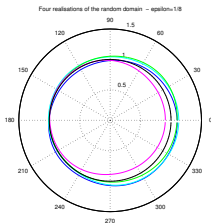
La question :

supposons connaître le processus X , que peut on calculer sur la distribution de la quantité d'intérêt ?

Un exemple académique pour illustrer la question

- Perturbations aléatoires du disque unité :
 α_i sont i.i.d. suivent la distribution uniforme sur $[-1/2, 1/2]$
 f_i modes de Fourier

$$D_\varepsilon(\omega) = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r < 1 + \varepsilon f(\theta, \omega) \text{ and } f(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) f_i(\theta) \right\}$$



Un exemple académique pour illustrer la question

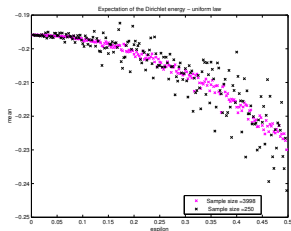
- Perturbations aléatoires du disque unité :
 α_i sont i.i.d. suivent la distribution uniforme sur $[-1/2, 1/2]$
 f_i modes de Fourier

$$D_\varepsilon(\omega) = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r < 1 + \varepsilon f(\theta, \omega) \text{ and } f(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) f_i(\theta) \right\}$$

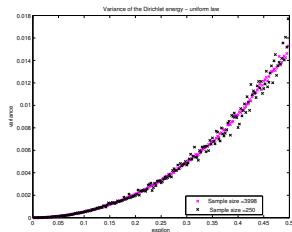
- on considère l'énergie de Dirichlet .

Simulations Monte-Carlo simulations : les 4 premiers moments of $E(D(\cdot))$

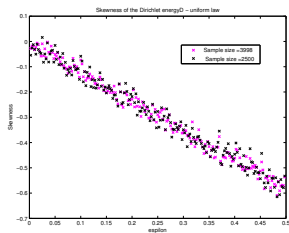
Espérance



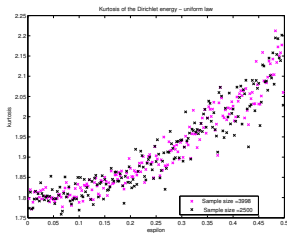
Variance



Moment d'ordre 3 normalisé



Moment d'ordre 4 normalisé



Notre contribution

Supposant connu le processus X , nous obtenons

- ① des **expressions déterministes** des coefficients du développement (en ε) des moments de la distribution de la quantité d'intérêt
- ② une **méthode numérique très efficace** pour les calculer.

Le calcul de forme usuel

Nous utiliserons le calcul à la Murat-Simon basé sur la paramétrisation par difféomorphismes $T = Id + \theta$ avec $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ où nous différentions $\theta \mapsto J((Id + \theta)(\Omega))$ at $\theta = 0$.

Le calcul de forme usuel

Nous utiliserons le calcul à la Murat-Simon basé sur la paramétrisation par difféomorphismes $T = Id + \theta$ avec $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ où nous différencions $\theta \mapsto J((Id + \theta)(\Omega))$ at $\theta = 0$.

Ce calcul existe au second ordre et la formule de Taylor à l'ordre deux s'écrit $\theta = I + X \mathbf{n}$

$$J(D(X)) = J(D_0) + L[J](D_0)X + \frac{1}{2}B[J](D_0)(X, X) + R_2(X),$$

avec

- $L[J](D_0)$ est le gradient de forme,
- $B[J](D_0)$ est la hessienne de forme,
- le reste R_2 est négligeable par rapport à $\|X\|_{W^{1,\infty}}^2$.

Structure des dérivées de formes

Soit $k \geq 1$ un entier et J fonction définie sur

$$\mathcal{O}_k = \{ \text{ouverts bornés de } \mathbb{R}^d \text{ avec un bord } \mathcal{C}^k \}.$$

Soit $\mathcal{J} : \mathcal{C}^{k,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{J}(\theta) = J((I + \theta)(D))$.

- **Gradient de forme** : Si $D \in \mathcal{O}_{k+1}$, \mathcal{J} est différentiable en 0, alors il existe une forme linéaire L continue sur $\mathcal{C}^k(\partial D)$ telle que :

$$D\mathcal{J}(0)\xi = L(\xi \cdot \mathbf{n}) \forall \xi \in \mathcal{C}^{k,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

Structure des dérivées de formes

Soit $k \geq 1$ un entier et J fonction définie sur

$$\mathcal{O}_k = \{ \text{ouverts bornés de } \mathbb{R}^d \text{ avec un bord } \mathcal{C}^k \}.$$

Soit $\mathcal{J} : \mathcal{C}^{k,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{J}(\theta) = J((I + \theta)(D))$.

- **Hessienne de forme** : Si $D \in \mathcal{O}_{k+2}$, \mathcal{J} est deux fois différentiable en 0, alors il existe une forme bilinéaire, symétrique B continue sur $\mathcal{C}^k(\partial D) \times \mathcal{C}^k(\partial D)$ telle que $\forall (\xi, \zeta) \in \mathcal{C}^{k,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)^2$

$$D^2 \mathcal{J}(0)(\xi, \zeta) = B(\xi \cdot \mathbf{n}, \zeta \cdot \mathbf{n}) + L(Z),$$

avec

$$Z = (D_\tau \mathbf{n} \zeta_\tau) \cdot \xi_\tau - \nabla_\tau (\zeta \cdot \mathbf{n}) \cdot \xi_\tau - \nabla_\tau (\xi \cdot \mathbf{n}) \cdot \zeta_\tau.$$

Exemple du périmètre P

$$P(D) = \int_{\partial D} 1.$$

Exemple du périmètre P

$$P(D) = \int_{\partial D} 1.$$

Les spécialistes des surfaces minimales savent depuis longtemps que

$$L[P](D).X = \int_{\partial D} HX;$$

$$B[E](P).(X, X) = \int_{\partial D} |\nabla_{\tau} X|^2 + [H^2 - \text{Tr}((D_{\tau} \mathbf{n})^*(D_{\tau} \mathbf{n}))] X^2.$$

Exemple du périmètre P

$$P(D) = \int_{\partial D} 1.$$

Si $D = B(0, 1)$, pour $X \in L^2(\partial B_1)$ décomposé en harmoniques sphériques :

$$X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} \alpha_{k,l}(X) Y^{k,l}(x), \quad \text{pour } |x| = 1.$$

$$L[P](B(0, 1)).X = (d-1) \int_{\partial B(0,1)} X$$

$$B[P](B(0, 1)).(X, X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} [k^2 + (d-2)k + (d-1)(d-2)] \alpha_{k,l}(X)^2.$$

Exemple de l'énergie de Dirichlet E

$$E(D) = -\frac{1}{2} |u_D|_{H^1}^2 \text{ où } u_D \in H_0^1(D) \text{ vérifie } -\Delta u = 1 .$$

Exemple de l'énergie de Dirichlet E

$$E(D) = -\frac{1}{2} |u_D|_{H^1}^2 \text{ où } u_D \in H_0^1(D) \text{ vérifie } -\Delta u = 1 .$$

$$L[E](D).X = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} (\partial_n u)^2 X;$$

$$B[E](D).(X, X) = \langle -\partial_n u X, \Lambda(-\partial_n u X) \rangle_{H^{1/2} \times H^{-1/2}} \\ + \int_{\partial D} \left[\partial_n u + \frac{1}{2} H(\partial_n u)^2 \right] X^2;$$

où $\Lambda : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$ est l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann:
 $\Lambda(X) = -\partial_n V(X)$ où $V(X)$ désigne la solution de

$$-\Delta V(X) = 0 \text{ dans } D, \quad V(X) = X \text{ sur } \partial D,$$

Exemple de l'énergie de Dirichlet E

$$E(D) = -\frac{1}{2} |u_D|_{H^1}^2 \text{ où } u_D \in H_0^1(D) \text{ vérifie } -\Delta u = 1 .$$

$$L[E](D).X = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} (\partial_n u)^2 X;$$

$$B[E](D).(X, X) = \int_D |\nabla V(-\partial_n u X)|^2 \\ + \int_{\partial D} \left[\partial_n u + \frac{1}{2} H(\partial_n u)^2 \right] X^2;$$

où $V(X)$ est solution de

$$-\Delta V(X) = 0 \text{ dans } D, \quad V(X) = X \text{ sur } \partial D,$$

Exemple de l'énergie de Dirichlet E

$$E(D) = -\frac{1}{2} |u_D|_{H^1}^2 \text{ où } u_D \in H_0^1(D) \text{ vérifie } -\Delta u = 1 .$$

Si $D = B(0, 1)$, pour $X \in L^2(\partial B_1)$ décomposé en harmoniques sphériques :

$$X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} \alpha_{k,l}(X) Y^{k,l}(x), \quad \text{pour } |x| = 1.$$

$$L[E](D).X = -\frac{1}{2d^2} \int_{\partial B(0,1)} X$$

$$B[E](B_1).(X, X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} \left[\frac{1}{d^2} k - \frac{d+1}{2d^2} \right] \alpha_{k,l}(X)^2.$$

L' idée

Si le processus X vérifie

- 1 régularité uniforme : $X \in L_{\mathbb{P}}^2(\Omega, \mathcal{C}^{2,1}(\partial D_0))$.
- 2 borne uniforme : $\exists h_{\max} > 0$, p.p. $\omega \in \Omega$, $\|X(\omega, \cdot)\|_{\mathcal{C}^{2,1}} \leq h_{\max}$

L' idée

Si le processus X vérifie

- ① régularité uniforme : $X \in L_{\mathbb{P}}^2(\Omega, \mathcal{C}^{2,1}(\partial D_0))$.
- ② borne uniforme : $\exists h_{\max} > 0$, p.p. $\omega \in \Omega$, $\|X(\omega, \cdot)\|_{\mathcal{C}^{2,1}} \leq h_{\max}$

alors

L' idée

Si le processus X vérifie

- 1 régularité uniforme : $X \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{C}^{2,1}(\partial D_0))$.
- 2 borne uniforme : $\exists h_{\max} > 0$, p.p. $\omega \in \Omega$, $\|X(\omega, \cdot)\|_{\mathcal{C}^{2,1}} \leq h_{\max}$

alors la formule de Taylor d'ordre deux

$$\begin{aligned} J(D(\varepsilon X(\omega))) &= J(D_0) + L[J](D_0)\varepsilon X(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2}B[J](D_0)(\varepsilon X(\omega), \varepsilon X(\omega)) + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

est vérifiée ponctuellement (p.p.) sur Ω et peut donc être intégrée sur Ω .
Alors ...

L'espérance et la variance de $J(D(\omega))$ admettent les développements asymptotiques

$$\mathbb{E}(J(D)) = J(D_0) + \mathbb{E}(L(X)) \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbb{E}(B(X, X)) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(J(D)) = & \mathbb{E} \left([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^2 \right) \varepsilon^2 \\ & + \mathbb{E} ([L(X) - \mathbb{E}(L(X))] [B(X, X) - \mathbb{E}(B(X, X))]) \varepsilon^3 \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Pour $k \geq 2$, le moment centré normalisé de $J(D(\omega))$ vérifie

$$\mathbb{M}_k(J(D)) := \mathbb{E} \left(\frac{[J(D) - \mathbb{E}(J(D))]^k}{\sqrt{\text{var}(J(D))}^k} \right) = a_k + b_k \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (1)$$

où les coefficients a_k and b_k valent

$$a_k = \gamma_k \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^k) \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^2),$$

$$b_k = \gamma_k \frac{k}{2} \left\{ \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^{k-1} [B(X, X) - \mathbb{E}(B(X, X))]) \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^2) \right. \\ \left. - \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))] [B(X, X) - \mathbb{E}(B(X, X))]) \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^k) \right\},$$

et la constante de normalisation γ_k est

$$\gamma_k = \mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]^2)^{-1 - k/2}.$$

Hypothèses de structure sur le processus

On doit calculer

$$\mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]) \text{ ou } \mathbb{E}([B(X, X) - \mathbb{E}(B(X, X))])$$

avec L linéaire continue et B bilinéaire continue.

Hypothèses de structure sur le processus

Pour le coefficient dominant de la variance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L(X)^2) &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{\partial D} \ell(x) X(x, \omega) d\sigma(x) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\partial D} \int_{\partial D} X(x, \omega) X(y, \omega) \ell(x) \ell(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \right] \\ &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \mathbb{E}[X(x, \cdot) X(y, \cdot)] \ell(x) \ell(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \text{Cov}_X(x, y) \ell(x) \ell(y) d\sigma(x) d\sigma(y).\end{aligned}$$

On peut alors penser à la décomposition de Karhunen-Loève de X

Hypothèses de structure sur le processus

On doit calculer

$$\mathbb{E}([L(X) - \mathbb{E}(L(X))]) \text{ or } \mathbb{E}([B(X, X) - \mathbb{E}(B(X, X))])$$

avec L linéaire continue et B bilinéaire continue.

pour avoir des calculs simples, on choisit de prendre

$$X(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\omega) f_i(x)$$

α_i sont soit décorrélés ou i.i.d. et suivent la même distribution \mathcal{L} centrée d'une variable aléatoire α avec un moment d'ordre deux.

Hypothèse technique : $\sum_{i \in \mathbb{N}} \|f_i\|_{\mathcal{C}^{2,1}}$ converge.

Un résultat utile pour le calcul

- Si (α_i) sont décorrés, alors

$$\mathbb{E}(J(D)) = J(D_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbb{E}(\alpha^2) \sum_{i=1}^{\infty} B(f_i, f_i) + \mathcal{o}(\varepsilon^2).$$

Un résultat utile pour le calcul

- Si (α_i) sont décorrélés, alors

$$\mathbb{E}(J(D)) = J(D_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbb{E}(\alpha^2) \sum_{i=1}^{\infty} B(f_i, f_i) + o(\varepsilon^2).$$

- Si (α_i) sont indépendents et α a des moments jusqu'à l'ordre 3, alors

$$\begin{aligned} \text{var}(J(D)) &= \varepsilon^2 \mathbb{E}(\alpha^2) \sum_{i=1}^{\infty} (L(f_i))^2 \\ &\quad + \varepsilon^3 \mathbb{E}(\alpha^3) \sum_{i=1}^{\infty} L(f_i) B(f_i, f_i) + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Un résultat utile pour le calcul

Il suffit d'évaluer les dérivées $L(f_i)$ et $B(f_i, f_i)$ de la série tronquée

$$X(x, \omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) f_i(x)$$

Dans l'exemple de l'énergie de Dirichlet :

$$L(f_i) = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} (\partial_n u)^2 f_i$$

Un résultat utile pour le calcul

Il suffit d'évaluer les dérivées $L(f_i)$ et $B(f_i, f_i)$ de la série tronquée

$$X(x, \omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) f_i(x)$$

Dans l'exemple de l'énergie de Dirichlet :

$$L(f_i) = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} (\partial_n u)^2 f_i$$

$$B(f_i, f_i) = \int_D |\nabla V(-\partial_n u f_i)|^2 + \int_{\partial D} \left[\partial_n u + \frac{1}{2} H(\partial_n u)^2 \right] f_i^2$$

où $V(X)$ est solution de

$$-\Delta V(X) = 0 \text{ dans } D, \quad V(X) = X \text{ sur } \partial D,$$

Un résultat utile pour le calcul

$$\mathbb{E}(J(D))_N = J(D_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbb{E}(\alpha^2) \sum_{i=1}^N B(f_i, f_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$$\begin{aligned} \text{var}(J(D))_N &= \varepsilon^2 \mathbb{E}(\alpha^2) \sum_{i=1}^N (L(f_i))^2 \\ &\quad + \varepsilon^3 \mathbb{E}(\alpha^3) \sum_{i=1}^N L(f_i) B(f_i, f_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

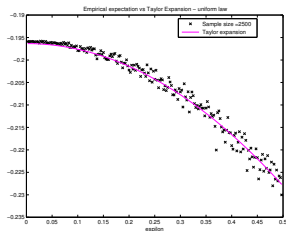
Coût du calcul

$N + 1$ résolutions de systèmes linéaires associés à la même matrice.
Un seul maillage, une seule matrice de rigidité à assembler...
On ne travaille que sur le domaine nominal

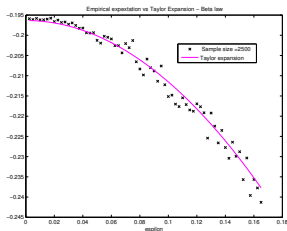
Comparaison avec Monte-Carlo

($N = 11$)

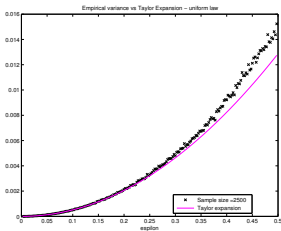
Espérance - loi uniforme



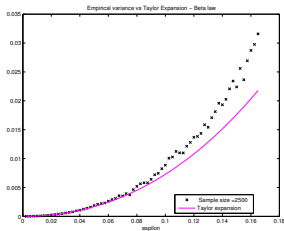
Espérance - loi beta



Variance - loi uniforme



Variance - loi beta



Question 2 :

*Calculer la solution du problème aux limites
lui-même*

Notre objectif

Puisque le domaine de calcul est aléatoire, la solution d'un problème aux limites est elle aussi aléatoire.

La question :

supposons connaître le processus X , que peut on calculer sur la solution du problème aux limites ?

La littérature:

- Sans petitesse des déformations
 - D. Xiu and D.M. Tartakovsky. *Numerical methods for differential equations in random domains*. **SIAM J. Sci. Comput.**, 28(3):1167–1185, 2006.
 - C. Canuto and T. Kozubek. *A fictitious domain approach to the numerical solution of PDEs in stochastic domains*. **Numer. Math.**, 107(2):257–293, 2007.
- Avec petites déformations : H. Harbrecht, R. Schneider, and C. Schwab. *Sparse second moment analysis for elliptic problems in stochastic domains*. **Numer. Math.**, 109(3):385–414, 2008.

Notre objectif

Puisque le domaine de calcul est aléatoire, la solution d'un problème aux limites est elle aussi aléatoire.

La question :

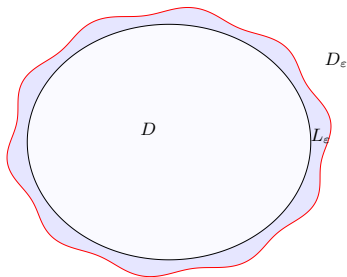
supposons connaître le processus X , que peut on calculer sur la solution du problème aux limites ?

Notre idée :

utiliser les méthodes de couches minces pour dériver une condition aux limites approchées avec des coefficients aléatoires sur un domaine fixe.

La situation géométrique

- une couche mince d'épaisseur caractéristique $\varepsilon > 0$ autour d'un domaine fixe D
- $L_\varepsilon = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{x}) : 0 \leq t < \varepsilon h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D\}$ et $D_\varepsilon = D \cup L_\varepsilon$.
- $\exists 0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ tels que $h_{\min} \leq h(\mathbf{x}) \leq h_{\max} \forall \mathbf{x} \in \partial D$.



Les problèmes aux limites

Le problème dans la géométrie aléatoire

Pour f régulière définie sur tous les D_ε , trouver u

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ in } D_\varepsilon, \\ u = 0 \text{ on } \partial D_\varepsilon, \end{cases}$$

avec σ constant par morceaux valant σ_0 dans D et 1 dans L_ε .

Le problème approché (à l'ordre un) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[1]} = f \text{ in } D, \\ u^{[1]} + \varepsilon h \sigma_0 \partial u^{[1]} = 0 \text{ on } \partial D. \end{cases}$$

Les problèmes aux limites

Le problème dans la géométrie aléatoire

Pour f régulière définie sur tous les D_ε , trouver u

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ in } D_\varepsilon, \\ u = 0 \text{ on } \partial D_\varepsilon, \end{cases}$$

avec σ constant par morceaux valant σ_0 dans D et 1 dans L_ε .

Le problème approché (à l'ordre un) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[1]} = f \text{ in } D, \\ u^{[1]} + \varepsilon h \sigma_0 \partial u^{[1]} = 0 \text{ on } \partial D. \end{cases}$$

$\exists C(h)$ indépendante de ε telle que $\|u - u^{[1]}\|_{H^1(D)} \leq C\varepsilon^2$.

Les problèmes aux limites

Le problème dans la géométrie aléatoire

Pour f régulière définie sur tous les D_ε , trouver u

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{in } D_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{on } \partial D_\varepsilon, \end{cases}$$

avec σ constant par morceaux valant σ_0 dans D et 1 dans L_ε .

Le problème approché (à l'ordre deux) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[2]} = f & \text{in } D, \\ \left(1 + \frac{\kappa h \varepsilon}{2}\right) u^{[2]} + \varepsilon \sigma_0 h \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]} = \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

Les problèmes aux limites

Le problème dans la géométrie aléatoire

Pour f régulière définie sur tous les D_ε , trouver u

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{in } D_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{on } \partial D_\varepsilon, \end{cases}$$

avec σ constant par morceaux valant σ_0 dans D et 1 dans L_ε .

Le problème approché (à l'ordre deux) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[2]} = f & \text{in } D, \\ \left(1 + \frac{\kappa h \varepsilon}{2}\right) u^{[2]} + \varepsilon \sigma_0 h \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]} = \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$\exists C(h)$ indépendante de ε telle que $\|u - u^{[2]}\|_{H^1(D)} \leq C\varepsilon^3$.

Hypothèses sur le profil $h(\cdot, \omega)$ de la couche mince

(UB) $\exists 0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ et $q < 1$ tel que le champ aléatoire

$$h(\mathbf{x}, \omega) = \bar{h}(\mathbf{x}) + \tilde{h}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{with} \quad \bar{h}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(h(\mathbf{x}, \omega))$$

vérifie

$$0 < h_{\min} \leq \bar{h}(\mathbf{x}) \leq h_{\max} \quad \text{and} \quad |\tilde{h}(\mathbf{x}, \omega)| \leq q|\bar{h}(\mathbf{x})|$$

pour tout $\mathbf{x} \in D$ et pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$.

(UR) $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}, \omega)$ est \mathcal{C}^1 , i.e. $h \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{C}^1(\partial D))$.

Conséquences pour nous : estimer l'erreur systématique commise

Le problème approché (à l'ordre deux) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[2]} = f & \text{in } D, \\ \left(1 + \frac{\kappa h \varepsilon}{2}\right) u^{[2]} + \varepsilon \sigma_0 h \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]} = \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$\exists C(h)$ indépendante de ε telle que $\|u - u^{[2]}\|_{H^1(D)} \leq C\varepsilon^3$.

Conséquences pour nous : estimer l'erreur systématique commise

Le problème approché (à l'ordre deux) dans la géométrie fixe

$$\begin{cases} -\sigma_0 \Delta u^{[2]} = f & \text{in } D, \\ \left(1 + \frac{\kappa h \varepsilon}{2}\right) u^{[2]} + \varepsilon \sigma_0 h \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]} = \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$\exists C(h)$ indépendante de ε telle que $\|u - u^{[2]}\|_{H^1(D)} \leq C\varepsilon^3$.

En reprenant les preuves pas à pas, on montre que $\exists C$ indépendante de ε et de h telle que

$$\|u - u^{[2]}\|_{H^1(D)} \leq C\varepsilon^3.$$

En fait, elle ne dépend que de h_{max} et h_{min} .

Formulation variationnelle

On multiplie l'équation

$$\begin{aligned} -\sigma_0 \Delta u^{[2]}(\omega) &= f && \text{dans } D \\ \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]}(\omega) + \frac{1}{\varepsilon \sigma_0} \left[\frac{1}{h(\omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \kappa \right] u^{[2]}(\omega) &= \frac{\varepsilon h(\omega)}{2\sigma_0} f && \text{sur } \partial D \end{aligned}$$

satisfaite \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$ par une fonction test $v \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^1(D))$ et on intègre en espace et en probabilité.

Formulation variationnelle

On multiplie l'équation

$$\begin{aligned} -\sigma_0 \Delta u^{[2]}(\omega) &= f && \text{dans } D \\ \partial_{\mathbf{n}} u^{[2]}(\omega) + \frac{1}{\varepsilon \sigma_0} \left[\frac{1}{h(\omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \kappa \right] u^{[2]}(\omega) &= \frac{\varepsilon h(\omega)}{2\sigma_0} f && \text{sur } \partial D \end{aligned}$$

satisfaite \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$ par une fonction test $v \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^1(D))$ et on intègre en espace et en probabilité.

La formulation variationnelle

Trouver $u^{[2]} \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^1(D))$ telle que $\forall v \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^1(D))$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \sigma_0 \nabla u^{[2]}(\omega) \nabla v(\omega) d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon \sigma_0} \int_{\partial D} \left[\frac{1}{h(\omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \kappa \right] u^{[2]}(\omega) v(\omega) d\sigma d\mathbb{P}(\omega) \\ = \int_{\Omega} \int_D f v(\omega) d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \frac{\varepsilon}{2\sigma_0} f v(\omega) d\sigma d\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

Existence et unicité de la solution

Sous les hypothèses (UB) et (UR), il existe une unique solution $u^{[2]} \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^1(D))$ à la formulation variationnelle si ε est assez petit

$$|\varepsilon \kappa(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{h_{\max}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial D.$$

En particulier, pour la norme

$$\|u(\omega)\| := \sqrt{\sigma_0 |u(\omega)|_{H^1(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon \sigma_0} \|\gamma(u(\omega))\|_{L^2(\partial D)}^2}$$

où $\gamma : H^1(D) \rightarrow L^2(\partial D)$ est l'opérateur de trace, nous avons l'estimation uniforme pour ε assez petit

$$\sqrt{\int_{\Omega} \|u(\omega)\|^2 \partial \mathbb{P}} \leq C \{ \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(D)} + \|\gamma(f)\|_{L^2(\partial D)} \}$$

où $\|\cdot\|_{\tilde{H}^{-1}(D)}$ est la norme du dual de $\|\cdot\|_{H^1(D)}$.

Erreurs systématiques commises

•

$$\|u - u^{[2]}\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathbf{H}^1(D))} \leq C\varepsilon^3.$$

•

$$\|\mathbb{E}(u) - \mathbb{E}(u^{[2]})\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq C\varepsilon^3,$$

•

$$\|\mathbb{V}(u) - \mathbb{V}(u^{[2]})\|_{\mathbf{W}^{1,1}(D)} \leq C\varepsilon^4.$$

Pour faire des calculs

Modèle pour la fluctuation

$$\tilde{h}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=1}^m h_k(\mathbf{x}) Y_k(\omega)$$

- $\{h_k(\mathbf{x})\}$ sont deux à deux orthogonales dans $L^2(D)$
- $\{Y_k(\omega)\}$ sont indépendentes et unif. distribuées dans $[-1/2, 1/2]$.

L'indépendance des $\{Y_k(\omega)\}_k$ garantit que la mesure $\mathbb{P}_{\mathbf{Y}} := \mathbb{P} \circ \mathbf{Y}^{-1}$ où \mathbf{Y} est l'application mesurable

$$\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \square := [-1/2, 1/2]^m, \quad \omega \mapsto \mathbf{Y}(\omega) := (Y_1(\omega), \dots, Y_m(\omega))$$

a la fonction de densité conjointe 1_{\square} .

Conséquence: reformulation en un problème déterministe paramétré

On remplace $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega)$ par $L^2(\square)$ et les variables aléatoires Y_k par les coordonnées $y_k \in [-1/2, 1/2]$.

Le problème déterministe mais en grande dimension à résoudre

On cherche $u \in L^2(\square, H^1(D))$ telle que pour tout $v \in L^2(\square, H^1(D))$:

$$\begin{aligned} \int_{\square} \left(\sigma_0 \int_D \nabla u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon \sigma_0} \int_{\partial D} \left[\frac{1}{h(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + \frac{\varepsilon}{2} \kappa(\mathbf{x}) \right] u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} \right) d\mathbf{y} \\ = \int_{\square} \left(\int_D f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \frac{\varepsilon h(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2\sigma_0} f(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \right) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Ici, h est affine en la variable représentant l'aléa y :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{h}(\mathbf{x}) + \tilde{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{avec} \quad \bar{h}(\mathbf{x}) := \mathbb{E}(h(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \tilde{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^m h_k(\mathbf{x}) y_k.$$

La condition de résolubilité devient

$$0 < h_{\min} \leq \bar{h}(\mathbf{x}) \leq h_{\max} \quad \text{et} \quad |\tilde{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq q \bar{h}(\mathbf{x}) \quad \text{pour un} \quad 0 \leq q < 1$$

Exemple numérique

A résoudre

$$-\Delta u(\omega) = 4 \text{ in } D_\varepsilon(\omega), \quad u(\omega) = 0 \text{ on } \partial D_\varepsilon(\omega),$$

sur les disques perturbés $D_\varepsilon(\omega) = D \cup L_\varepsilon(\omega)$ avec

$$L_\varepsilon(\omega) = \{\mathbf{x} + t\mathbf{n}(\mathbf{x}) : 0 \leq t < \varepsilon h(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{x} \in \partial D\}.$$

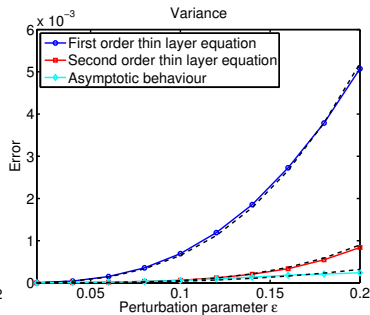
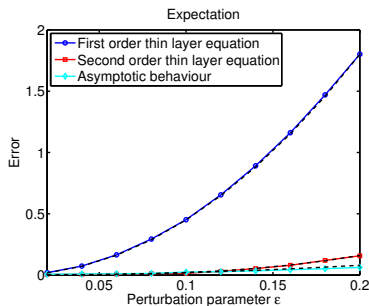
$$h(\mathbf{x}, \omega) = 1 + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^5 \{a_k(\omega) \cos(k\varphi) + b_k(\omega) \sin(k\varphi)\}$$

$a_k, b_k \in [-1/2, 1/2]$ sont indépendantes et unif. distribuées

Implémentation

- en espace : maillage de 4000 triangles, éléments P1
- on utilise une méthode de quasi Monte-Carlo pour calculer les intégrales sur \square avec 10 000 points de Halton.

Exemple numérique : erreur ℓ^2 sur les moments versus ε .



Le comportement asymptotique est estimé par Monte-Carlo (50000 domaines tirés par valeur de ε)

Merci de votre attention.