Valeurs propres Courant-strictes du laplacien sur un tore

Journées de l'ANR OPTIFORM, Rennes

Corentin Léna

9 janvier 2015

Introduction

- M variété compacte (avec ou sans bord) de dimension n ;
- $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_k(M) \leq \dots$ suite des valeurs propres de $-\Delta_M$, avec condition de Dirichlet, comptées avec multiplicité.

Si u fonction propre :

- ensemble nodal : $\mathcal{N}(u) = \overline{\{x \in M\,;\, u(x) = 0\}}$;
- domaine nodal : composante connexe de $M \setminus \mathcal{N}(u)$;
- $\mu(u)$ nombre de domaines nodaux.

Si λ valeur propre, $\nu(\lambda) = \min\{k \geq 1\,;\, \lambda = \lambda_k(M)\}$.

Théorème de Courant

Si u est une fonction propre de $-\Delta_M$ associée à la valeur propre λ,

$$\mu(u) \leq \nu(\lambda).$$

Améliorations du théorème de Courant

Définition

La valeur propre λ est dite Courant-stricte s'il existe une fonction propre u associée telle que $\mu(u) = \nu(\lambda)$.

Théorème (Å. Pleijel, 1956)

Si Ω est un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^2$, seul un nombre fini des valeurs propres $(\lambda_k(\Omega))_{k\geq 1}$ sont Courant-strictes.

On pose $\mu_k = \max\{\mu(u)\,;\ u \text{ associée à } \lambda_k(\Omega)\}$. Alors $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_k}{k} \leq \frac{4}{j_{0,1}^2} < 1$.

Théorème (P. Bérard, D. Meyer, 1982)

Pour tout n, il existe $\gamma_n < 1$ tel que, pour toute variété compacte de dimension n,

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_k}{k} \leq \gamma_n.$$

Indications de preuve

Cas de Pleijel :

- Soit u, associée à $\lambda_k(\Omega)$, avec μ_k domaines nodaux $D_1, \ldots, D_{\mu_k}$.
- Application de Faber-Krahn : $\lambda_k(\Omega) = \lambda_1(D_i) \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{|D_i|}$ pour $1 \leq i \leq \mu_k$.
- Somme $\mu_k \pi j_{0,1}^2 \leq \lambda_k(\Omega)|\Omega|$.
- Loi de Weyl : $\lambda_k(\Omega) \sim \frac{4\pi k}{|\Omega|}$.
- Conclusion : $\limsup_{k \to +\infty} \frac{\mu_k}{k} \leq \frac{4}{j_{0,1}^2} \simeq 0.6917.$

Cas de Bérard et Meyer :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A(\varepsilon, M) > 0$ tel que si $|D| \leq A(\varepsilon, M)$, $|\partial D||D|^{-\frac{n-1}{n}} \geq (1-\varepsilon)|\partial B||B|^{-\frac{n-1}{n}}$.
- Si $|D| \leq A(\varepsilon, M)$, $\lambda_1(D) \geq (1-\varepsilon)^2 \lambda_1(B_1)|D|^{-\frac{2}{n}}$.

Remarques dans le cas des variétés

Différences avec l'inégalité isopérimétrique dans le plan : la surface peut avoir une courbure (sphère) ou être non-simplement connexe (tore).

Indications de preuve :

- On choisit $\varepsilon > 0$ et $A = A(\varepsilon, M)$ comme ci-dessus.
- Soit u fonction propre associée à $\lambda_k(M)$ ayant μ_k domaines nodaux.
- Il y a au plus $\ell = \lfloor |M|/A \rfloor$ domaines nodaux de volume supérieur à A.
- $(D_i)_{1 \leq i \leq N}$ domaines nodaux de volume inférieur ou égal à A.
- $\lambda_k(M) = \lambda_1(D_i) \geq (1-\varepsilon)^2 \lambda_1(B_1)|D_i|^{-\frac{2}{n}}$ pour $1 \leq i \leq N$.
- $\frac{\mu_k}{k} \leq \frac{|M|\lambda_k(M)^{\frac{n}{2}}}{k}(1-\varepsilon)^{-n}\lambda_1(B_1)^{-\frac{n}{2}} + \frac{\ell}{k}$.

$$\gamma_n = \frac{(2\pi)^n}{\beta_n} \frac{1}{\beta_n j^n_{(n-1)/2,1}} = \frac{2^{n-2} n^2 \Gamma(\frac{n}{2})^2}{j^2_{(n-2)/2,1}} < 0.7.$$

Exemples spécifiques

Théorème (P. Bérard, B. Helffer, 2014)

Si C est un carré dans $\mathbb{R}^2$, les seules valeurs propres Courant-strictes de $-\Delta_C$ sont $\lambda_k(C)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On note $\mathbb{T}^2$ le tore plat de dimension 2

$$\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2.$$

Théorème

Les seules valeurs propres Courant-strictes de $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$ sont $\lambda_k(\mathbb{T}^2)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Inégalités

Proposition (H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan, 1999)

Soit $D \subset \mathbb{T}^2$ à bord C^1, sans fissure et tel que $|D| \leq \frac{1}{\pi}$. Alors

$$4\pi|D| \leq |\partial D|^2.$$

Proposition

Sous les mêmes hypothèses :

$$\lambda_1(D) \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{|D|}.$$

Preuve : on applique la symétrisation de Schwartz aux ensembles de niveau $D_t = \{x\,;\, u(x) > t\}$, avec u fonction propre associée à $\lambda_1(D)$.

Preuve de l'inégalité isopérimetrique

- On se ramène au cas connexe.
- La frontière de D s'écrit comme une réunion finie de courbes fermées simples : $\partial D = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$.
- Premier cas : toutes les courbes sont triviales. On se ramène au cas euclidien, et on a l'inégalité si $|D| \leq \frac{1}{2}$.
- Deuxième cas : une des courbes n'est pas triviale. Alors il y une autre courbe non triviale (formule de Stokes), donc $|\partial D| \geq 2$, donc l'inégalité est vérifiée si $|D| \leq \frac{1}{\pi}$.

Cas général de l'inégalité isopérimétrique sur un tore

Théorème (H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan, 1999)

Soit $\mathbb{T}$ un tore plat de dimension 2 dont les géodésiques fermées ont la longueur minimale a. Soit $0 < A < |\mathbb{T}|$. Les régions de $\mathbb{T}$ d'aire A et de périmètre minimal sont

- un disque (circulaire) si $0 < A \leq \frac{a^2}{\pi}$;
- une bande délimitée par des géodésiques si $\frac{a^2}{\pi} \leq A|\mathbb{T}| - \frac{a^2}{\pi}$;
- le complémentaire d'un disque (circulaire) si $|\mathbb{T}| - \frac{a^2}{\pi} \leq A \leq |\mathbb{T}|$.

La preuve utilise des arguments variationnels.

Valeurs propres

Valeurs propre de $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$:

$$\lambda_{m,n} = 4\pi^2(m^2 + n^2)$$

Fonctions propres :

$$u^{cc}_{m,n}(x,y) = \cos(2m\pi x)\cos(2n\pi y);$$
$$u^{cs}_{m,n}(x,y) = \cos(2m\pi x)\sin(2n\pi y);$$
$$u^{sc}_{m,n}(x,y) = \sin(2m\pi x)\cos(2n\pi y);$$
$$u^{ss}_{m,n}(x,y) = \sin(2m\pi x)\sin(2n\pi y).$$

On associe a $\lambda_{m,n}$ un sous-espace de fonctions propres $E_{m,n}$, de dimension 1, 2 ou 4. On a

$$L^2(\mathbb{T}^2) = \overline{\bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} E_{m,n}}.$$

Loi de Weyl

- $N(\lambda) = \sharp\{k \,:\, \lambda_k(\mathbb{T}^2) \leq \lambda\}$ (fonction de comptage) ;
- $\mathcal{R}_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq \frac{\lambda}{4\pi^2}\right\}$;
- $n(\lambda) = \sharp\left(\mathbb{N}^2 \cap \mathcal{R}_\lambda\right)$;
- $N(\lambda) = 4n(\lambda) - 4\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \right\rfloor - 3.$

On obtient une minoration de la fonction de comptage :

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda}{4\pi} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} - 3.$$

On en déduit :

$$\lambda_k(\mathbb{T}^2) \leq \left(4 + 2\sqrt{4 + \pi(k+3)}\right)^2.$$

Preuve du théorème

Notation : $j := j_{0,1}$

Remarque : si λ est une valeur propre Courant-stricte de $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$ avec $\nu(\lambda) \geq 4$, alors $\lambda \geq \pi j^2 \nu(\lambda)$.

Calcul direct : si

$$k > \frac{\left(4j + 2\sqrt{4j^2 + 3\pi(j^2 - 4)}\right)^2}{\pi(j^2 - 4)^2} \simeq 49.5973,$$

alors

$$\left(4 + 2\sqrt{4 + \pi(k+3)}\right)^2 < \pi j^2 k.$$

Conclusion : si $\nu(\lambda) \geq 50$, la valeur propre λ n'est pas Courant-stricte.

$\frac{\lambda}{4\pi^2}$	indices	multiplicités	multiplicités cumulées
0	$(0,0)$	1	1
1	$(1,0)$, $(0,1)$	4	5
2	$(1,1)$	4	9
4	$(2,0)$, $(0,2)$	4	13
5	$(2,1)$, $(1,2)$	8	21
8	$(2,2)$	4	25
9	$(3,0)$, $(0,3)$	4	29
10	$(3,1)$, $(1,3)$	8	37
13	$(3,2)$, $(2,3)$	8	45
16	$(4,0)$, $(0,4)$	4	49
17	$(4,1)$, $(1,4)$	8	57

TABLE : Les 57 premières valeurs propres

On a

$$\frac{\lambda_k(\mathbb{T}^2)}{4k\pi^2} < \frac{j^2}{4\pi} \simeq 0.4602.$$

pour $k \in \{6, 10, 14, 22, 26, 30, 38, 46\}$.

k	6	10	14	22	26	30	38	46
$\frac{\lambda_k(\mathbb{T}^2)}{4k\pi^2}$	0.3333	0.4000	0.3571	0.3636	0.3462	0.3333	0.3421	0.3478

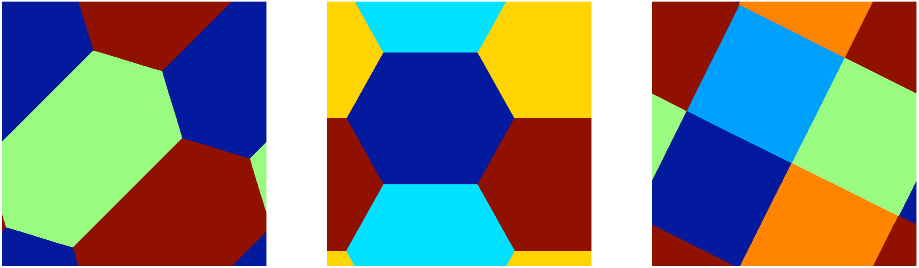
TABLE : Table des rapports

Les seules valeurs propres Courant-strictes sont donc $\lambda_1(\mathbb{T}^2) = 0$ et $\lambda_2(\mathbb{T}^2) = \lambda_3(\mathbb{T}^2) = \lambda_2(\mathbb{T}^2) = \lambda_2(\mathbb{T}^2) = 4\pi^2$.

Application : partitions minimales

- k-partition : ensemble de k ouverts connexes deux à deux disjoints, $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$.
- Énergie : $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i)$.
- k-partition minimale : $\Lambda_k(\mathcal{D}^*) = \mathfrak{L}_k(\mathbb{T}^2) := \inf_{\mathcal{D}} \Lambda_k(\mathcal{D})$.
- Partition nodale : ensemble des domaines nodaux d'une fonction propre de $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$.
- Une partition nodale associé à (λ, u) est minimale si, et seulement si, $\mu(u) = \nu(\lambda)$ (B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini, 2009).
- Les k-partitions minimales de $\mathbb{T}^2$ ne sont nodales que si $k \in \{1, 2\}$.
- Applications des résultats sur les partitions minimales ("twisting trick"). On pose $\mathbb{T}_b^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z})$ avec $b \in]0, 1]$. On suppose $b^2 \notin \mathbb{Q}$. Les seules valeurs propres Courant-strictes de $-\Delta_{\mathbb{T}_b^2}$ sont $\lambda_k(\mathbb{T}_b^2)$ avec $k \in \{1, 2, 3\}$ (B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, 2014).

Résultats numériques



(a) $k = 3$ (b) $k = 4$ (c) $k = 5$

FIGURE : k-partition minimale de $\mathbb{T}^2$ pour $k \in \{3, 4, 5\}$

Numérique pour la somme sur la sphère (C. M. Elliot, T. Ranner, 2014)