Etude d'un problème extrémal pour les vecteurs propres de certaines équations de Sturm-Liouville

Thibault Liard, Pierre Lissy, Yannick Privat

7 janvier 2015

Soit T une constante positive et $\omega \subset (0, \pi)$, mesurable.

$$\begin{array}{ll} \partial_{tt}\varphi(t,x) - \partial_{xx}\varphi(t,x) + a(x)\varphi(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi), \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,\pi) = 0, & t \in [0,T], \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x),\ \partial_t\varphi(0,x) = \varphi_1(x), & x \in [0,\pi], \end{array} \tag{Eq-ondes}$$

où le potentiel $a(\cdot)$ est une fonction strictement positive appartenant à $L^\infty(0,\pi)$.

Définition

L'équation (Eq-ondes) est dit observable sur ω en temps T s'il existe une constante C strictement positive telle que

$$C \int_0^\pi \left(\varphi_1(x)^2 + \varphi_0'(x)^2 + a(x)\varphi_0(x)^2\right) dx \leq \int_0^T \int_\omega \partial_t\varphi(t,x)^2\, dxdt, \tag{Obs-ondes}$$

pour toute donnée initiale $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$.

Constante d'observabilité

On note $C_{T,\mathrm{obs}}(\omega)$ la plus grande constante dans l'inégalité d'observabilité précédente, c'est-à-dire

$$C_{T,\mathrm{obs}}(\omega) = \inf_{\substack{(\varphi_0,\varphi_1)\in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\\ (\varphi_0,\varphi_1)\neq(0,0)}} \frac{\int_0^T \int_\omega \partial_t\varphi(t,x)^2\,dxdt}{\int_0^\pi \left(\varphi_1(x)^2 + \varphi_0'(x)^2 + a(x)\varphi_0(x)^2\right)\,dx}. \tag{Cst-Obs}$$

$C_{T,\mathrm{obs}}(\omega)$ mesure la précision du problème inverse pour la reconstruction des solutions à partir des mesures observées sur $[0,T]\times\omega$.

Résultats connus

La Condition de Contrôle Géométrique (GCC) de C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch ('92).

L'inégalité d'observabilité est vérifiée si et seulement si (ω, T) satisfait GCC : Chaque rayon de l'optique géométrique se propageant dans Ω et réfléchissant sur sa frontière entre dans ω en un temps inférieur à T

$T_0(\omega)$ correspond au temps minimal d'observation

Observabilité de l'équation des ondes en une dimension

- ω un ouvert de $[0, \pi]$, $T > 2\pi$ et $a = 0$ (D.L Russel'78)
- ω un ensemble mesurable de $[0, \pi]$, $T > 2\pi$ et $0 \leq a < \epsilon$ (H-L-P)
- $\omega = (\alpha, \beta)$ un ouvert de $[0, \pi]$, $T > T_0(\omega) = 2\max(\alpha, \pi - \beta)$ et $a \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ (E. Zuazua'93)
- ω une union d'ouverts de $[0, \pi]$, $T > T_0(\omega)$ et $a \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ (H-L-P)

Contrôlabilité à 0

On considère un contrôle interne pour l'équation des ondes sur $(0, L)$ avec conditions au bord de Dirichlet.

$$\begin{cases} \partial_{tt} y(t,x) - \partial_{xx} y(t,x) + a(x) y(t,x) = h_\omega(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0, & t \in [0,T], \\ y(0,x) = y^0(x), & x \in (0,L), \\ \partial_t y(0,x) = y^1(x), & x \in (0,L), \end{cases} \tag{Contr-ondes}$$

où h_ω est un contrôle inclus dans $[0, T] \times \omega$.

Définition

Le problème est dit contrôlable à 0 en temps T *si et seulement si pour chaque condition initiale* $(y^0, y^1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)$, *on peut trouver un contrôle* $h_\omega \in L^2((0, T) \times (0, L))$ *tel que la solution* y *de* (Contr-ondes) *vérifie* $y(T, \cdot) = \partial_t y(T, \cdot) = 0$.

Coût du contrôle

Supposons que (Contr-ondes) est contrôlable à 0, alors il existe un unique contrôle de norme $L^2((0,T)\times(0,L))-$minimal qu'on notera par la suite h_ω^{opt}. Ainsi, nous pouvons définir l'opérateur HUM Γ_ω^T par

$$\begin{array}{rrcl} \Gamma_\omega^T : & H_0^1(0,L)\times L^2(0,L) & \longrightarrow & L^2((0,T)\times(0,L)) \\ & (y^0,y^1) & \longmapsto & h_\omega^{opt}. \end{array}$$

Proposition

Γ_ω^T est linéaire et continue. Nous définissons sa norme par $\|\Gamma_\omega^T\|$ qui est appelé le coût du contrôle en temps T

$\|\Gamma_\omega^T\|$ mesure l'énergie minimal dont on a besoin pour aller des conditions initiales à $(0,0)$

Observabilité-contrôlabilité

Puisque l'équation des ondes est linéaire et réversible en temps, on a le théorème suivant

Théorème

(Contr-ondes) *est contrôlable à* 0 *si et seulement si* (Eq-ondes) *est observable, et dans ce cas le coût du contrôle est*

$$\|\Gamma_\omega^T\| = C_{T,\mathrm{obs}}(\omega)^{-1}.$$

Soit $L > 0$. Soit $a \in L^\infty(0, L)$ telle que $a \geq 0$. On considère l'opérateur

$$A_a := -\partial_{xx} + a(\cdot)\,\mathrm{Id}$$

définit sur $\mathcal{D}(A_a) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$. On désigne par $e_{a,j} \in \mathcal{D}(A_a)$ une base hilbertienne de vecteurs propres dans $L^2(0, L)$, telle que $e_{a,j}$ résout le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -e''_{a,j}(x) + a(x)e_{a,j}(x) = \lambda_{a,j}^2 e_{a,j}(x), \ x \in (0, L), \\ e_{a,j}(0) = 0, \\ e_{a,j}(L) = 0. \end{cases} \tag{Pb-vp}$$

On impose aussi $\int_0^L e_{a,j}^2(x)dx = 1$.

Théorème

On a

$$C_{T,\mathrm{obs}}(\omega) \sim T \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega e_{a,j}(x)^2 dx, \quad \textit{lorsque } T \to \infty$$

Il existe un $T_1 > 0$ tel que pour tout $T > T_1$,

$$C_{T,\mathrm{obs}}(\omega) \geq K \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\, dx > 0$$

avec $K > 0$

Soit $M > 0$ et $V > 0$. Nous introduisons les ensembles

$$\mathcal{A}_M = \{a \in L^\infty(0,L) \text{ tel que } 0 \le a \le M \text{ p.p. sur } (0,L)\},$$

et

$$\mathcal{I}_V = \{a \in L^1(0,L) \text{ tel que } \int_\alpha^\beta a(x)\,dx = V\},$$

Problème 1 : (Contrainte L^∞ sur a)

$$\inf_{a\in\mathcal{A}_M} \inf_{\substack{\omega\subset(0,L) \\ \text{s.t. } |\omega|=rL}} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\,dx, \tag{Pb-$\mathcal{A}_M$}$$

Problème 2 : (Contraintes L^∞ et L^1 sur a)

$$\inf_{a\in\mathcal{A}_M\cap\mathcal{I}_V} \inf_{\substack{\omega\subset(0,L) \\ \text{s.t. } |\omega|=rL}} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\,dx. \tag{Pb-$\mathcal{A}_M$-$\mathcal{I}_V$}$$

Remarques

- *Si on n'impose pas la contrainte* $|\omega| = rL$, *le problème est trivial.*
- *Si on fixe le potentiel* a, *il est bien connu qu'il existe un* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\inf_{\substack{\omega \subset (0,L) \\ s.t.\ |\omega| = rL}} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\, dx = \int_{\omega^*} e_{a,j}(x)^2\, dx,$$

où $\omega^* = \{e_{a^*,j}(x)^2 < \tau\}$ *à un ensemble de mesure nulle près.*
- *Si* $a = 0$ *et* $L = \pi$, *alors* $e_{0,j}(x) = \sin(jx)$. *On a l'inégalité*

$$\int_\omega \sin(jx)^2\, dx \geq \frac{|\omega| - \sin|\omega|}{2}, \quad \text{pour tout } \omega \text{ mesurable.}$$

Théorème

Soit $r \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}_+$, *et* $V \in (0, LM)$. *Il existe au moins une solution pour les problèmes* $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M)$ *et* $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M\text{-}\mathcal{I}_V)$. *De plus, dans le cas du problème* $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M)$, a^* *est égal à* 0 *ou* M *p.p. dans* $(0, L)$.

Théorème

Soit $r \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}_+$, *et* $V \in (0, LM)$. *Il existe au moins une solution pour les problèmes* (Pb-$\mathcal{A}_M$) *et* (Pb-$\mathcal{A}_M$-$\mathcal{I}_V$). *De plus, dans le cas du problème* (Pb-$\mathcal{A}_M$), a^* *est égal à* 0 *ou* M *p.p. dans* $(0, L)$.

Pour M petit, nous avons un résultat plus précis

Théorème

Soit $r \in (0,1)$, $M \in (0, \pi^2/L^2)$ *and* $j \in \mathbb{N}^*$

- *Une solution* (a^*, ω^*) *du problème* (Pb-$\mathcal{A}_M$) *est telle que* ω^* *a* $j+1$ *composantes connexes et* a^* *a exactement* j *sauts.*
- *Une solution* (a^*, ω^*) *du problème* (Pb-$\mathcal{A}_M$-$\mathcal{I}_V$) *est telle que* ω^* *a* $j+1$ *composantes connexes et* a^* *a au plus* $8j$ *sauts.*

Nécessité de la contrainte L^∞

La contrainte $a \leq M$ est nécessaire, au sens suivant

Théorème

Soit $r \in (0,1)$ et $V > 0$. Le problème optimal

$$\inf_{a \in \mathcal{A}_\infty} \inf_{\substack{\omega \subset (0,L) \\ s.t.\ |\omega| = rL}} \int_\omega e_{a,j}(x)^2 \, dx, \tag{PbInf}$$

où $\mathcal{A}_\infty = \cup_{M>0} \mathcal{A}_M$, n'a pas de solution.

Nécessité de la contrainte L^∞

Idée de la preuve

Raisonnons par l'absurde. Soit (a^*, ω^*) une solution de (PbInf). Il existe un M_0 telle que a^* est une solution bang bang du problème

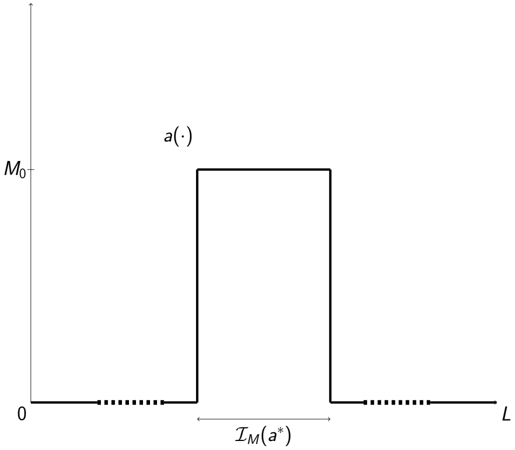
$$\inf_{a \in \mathcal{A}_{M_0}(0,L)} \inf_{\substack{\omega \subset (0,L) \\ \text{s.t. } |\omega| = rL}} \int_\omega e_{a,j}(x)^2 \, dx.$$

Nous allons alors construire une perturbation admissible a_n^* de a^* telle que

$$J(a_{n^*}) < J(a^*),$$

Construction de a_n^*

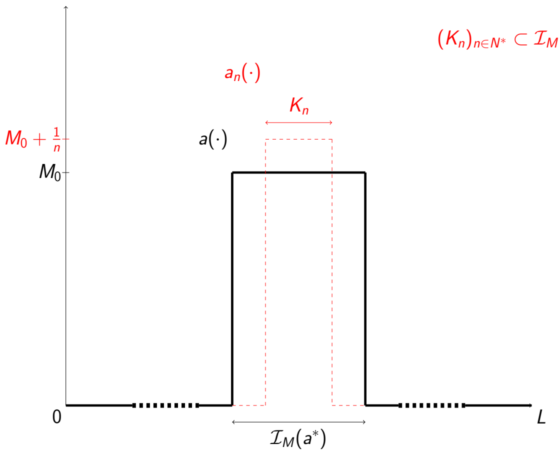
$$\mathcal{I}_M(a^*) = \{x \in (0, L) \backslash\ a(x) = M\}$$



Construction de a_n^*

$$\mathcal{I}_M(a^*) = \{x \in (0, L) \backslash\ a(x) = M\}$$

$$(K_n)_{n \in N^*} \subset \mathcal{I}_M(a^*) \backslash \lim_{n \to \infty} |K_n| = |\mathcal{I}_M(a^*)|$$



Conditions d'optimalité pour le premier vecteur propre

Proposition

Si (a^*, ω^*) *est une solution du problème* $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M)$ *ou* $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M\text{-}\mathcal{I}_V)$ *alors il existe* $(\mu, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *telles que*

- *on a* $\omega^* = \{e_{a^*,1}(x)^2 < \tau\}$ *à un ensemble de mesure nulle près ;*
- *on a*

$$M\chi_{\{p(x)e_{a^*,1}(x)>\mu\}} \leq a^*(x) \leq M\chi_{\{p(x)e_{a^*,1}(x)\geq\mu\}}(x), \quad \text{(Cond-opt)}$$

  pour presque tout $x \in (0, L)$*, où* p *est solution d'un système adjoint qui sera définit plus tard.*

Pour le problème $(\text{Pb-}\mathcal{A}_M)$*, on a* $\mu = 0$*.*

En conclusion, ω^* et a^* sont caractérisés en termes d'ensembles de niveaux de fonctions.

Système adjoint

p est l'unique solution de

$$\begin{cases} -p''(x) + (a^*(x) - \lambda_{a^*,1}^2)p(x) = (q^* - \tilde{c})e_{a^*,1}, & x \in (0, L), \\ p(0) = 0, \\ p(L) = 0, \end{cases} \tag{Syst-Adj}$$

vérifiant

$$\int_0^L p(x)e_{a^*,1}(x)\,dx = 0,$$

où q^* et $\tilde{c}$ sont donnés par

$$\tilde{c} = \int_0^L q^*(x)e_{a^*,1}^2(x)\,dx, \qquad \text{et} \qquad q^* = \chi_{\omega^*}.$$

a^* est bang bang pour le problème Pb-$\mathcal{A}_M$

On introduit

$$\mathcal{I}_\star(a^*) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{ x \in (0,L) : \frac{1}{k} < a^*(x) < M - \frac{1}{k} \right\} =: \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{I}_{\star,k}(a^*).$$

Supposons qu'il existe un $k_0 \in N^*$ tel que $|\mathcal{I}_{\star,k_0}(a^*)| > 0$. D'après les conditions d'optimalités on a donc

$$p(x)e_{a^*,1}(x) = 0, \quad \text{pour presque tout}\, x \in \mathcal{I}_{\star,k_0}(a^*).$$

Puisque $e_{a^*,1} > 0$, $p(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathcal{I}_{\star,k_0}(a^*)$. En utilisant la formulation variationnelle du système adjoint (Syst-Adj), il existe un point de Lebesgue $x_0 \in (0,L)$ tel que

$$(q^*(x_0) - \tilde{c})e_{a^*,1}(x_0) = 0,$$

d'où l'absurdité

Idée de la preuve du problème Pb-$\mathcal{A}_M$ lorsque $M \leq \pi^2/L^2$

a^* est donc une fonction bang bang. Les sauts de a^* sont inclus dans l'ensemble des zéros de la fonction $x \mapsto p(x)e_{a^*,1}(x)$. On montre que p peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = f(x)e_{a^*,1}(x)$$

pour tout $x \in (0, L)$, où la fonction f est définie par

$$f(x) = -\int_0^x g(t)dt + f(0),$$

avec

$$f(0) = \int_0^L \left(\int_0^x g(t)dt\right) e_{a^*,1}^2(x)\, dx$$

et la fonction g est définie par

$$g(t) = \frac{\int_0^t (q^*(s) - \tilde{c})e_{a^*,1}^2(s)\, ds}{e_{a^*,1}^2(t)}.$$

Comportement de la solution du système adjoint

Puisque $M \leq \pi^2/L^2$, $e_{a^*,1}(\cdot)$ est concave.

Lemme

La fonction f vérifie

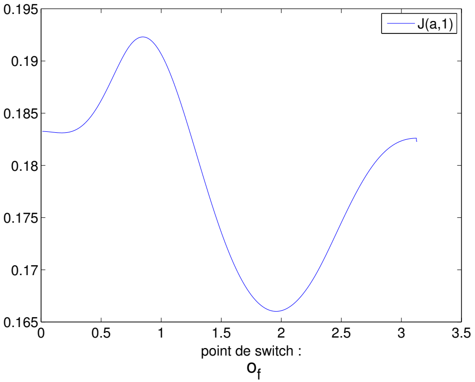
- *f est strictement décroissance sur $(0, o_g)$ et strictement croissante sur (o_g, L),*
- *$f(0) \leq 0$,*
- *Il existe un unique nombre réel o_f dans (o_g, L) tel que $f(o_f) = 0$,*
- *$f < 0$ dans $(0, o_f)$ et $f > 0$ dans (o_f, L).*

avec o_g l'unique zéro de g.

Donc

$$a^*(x) = M\chi_{(0_f, L)}(x), \quad \text{pour tout } x \in (0, L)$$

Graphe de la fonction coût en fonction du saut du potentiel

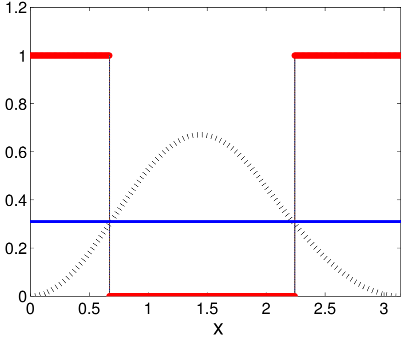


- $0 \leq a \leq 0.8$.
- $a(.) = 0.8\chi_{(o_f,\pi)}$.
- Fonction coût :

$$J(a,1) = \int_\omega e_{a,1}(x)^2\, dx.$$

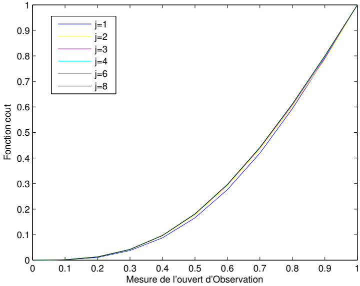
- $\omega = \{e_{a,1}(x)^2 < \tau\}$ et $|\omega| = 0.5\pi$.

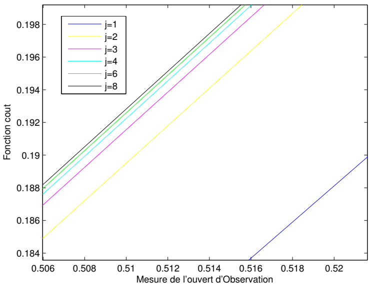
Représentation de ω^* et $e_{a^*,1}$ avec (ω^*, a^*) solution de Pb-$\mathcal{A}_M$



- $a(.) = 0.8\chi_{(1.96,\pi)}$.
- $e_{a,1}(\cdot)^2(\cdots)$.
- $\omega = \{e_{a,1}(x)^2 < \tau\}$ et $|\omega| = 0.5\pi$.

Graphe de la fonction coût en fonction de la mesure de l'ouvert d'observation ω





On trace $J(a^*, j) = \int_{\omega^*} e_{a^*,j}(x)^2\, dx$ avec (ω^*, a^*) solution de Pb-$\mathcal{A}_M$ en fonction de la mesure de ω^* pour différentes valeurs de j

Estimation de la constante d'observabilité

Théorème

Soit $r \in (0,1)$*. On considère une fonction* $a \in L^\infty(0,L;\mathbb{R}_+)$*. Soit* ω *un sous ensemble mesurable de* $(0,L)$ *vérifiant* $|\omega| = rL$*. Soit* j_0 *l'unique solution de l'équation*

$$\frac{1}{8} - \frac{\sin(r\pi)}{8r\pi} = \frac{L^2}{j_0^2\pi^2}\left(e^{\sqrt{2}L\|a\|_\infty} - 1\right) + \frac{\pi\|a\|_\infty}{2j_0}.$$

Then,

$$\inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\,dx \geq \min\left(\min_{j=1,\cdots,E(j_0)} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\,dx, A(L,|\omega|,\|a\|_\infty,j_0)\right),$$

Perspectives

$(1,1)$

Ω

$$a = 0$$

$$\Phi_{(j,k)}(x,y) = C\sin(jx)\sin(ky)$$

$$\lambda_{j,k} = j^2 + k^2$$

$$\inf_{\Phi} \inf_{\substack{\omega\subset\Omega \\ \text{s.t. } |\omega|=V_0}} \int_{\omega} \Phi(x,y)^2\, dxdy > 0\ ?$$

$(0,0)$

Merci de votre attention

Outils numériques

$$\inf_{a\in\mathcal{A}_M} \inf_{\substack{\omega\subset(0,L) \\ \text{s.t. } |\omega|=rL}} \int_\omega e_{a,j}(\cdot)^2\,dx \longleftrightarrow \min_{(o_1,\cdots,o_j)\in\mathbb{R}^j} \Gamma(o_1,\cdots,o_j) \text{ avec}$$

$$\Gamma(o_1,\cdots,o_j) = \int_{\{e_{a_{o_1,\cdots,o_j},j}(x)^2<\tau\}} e_{a_{o_1,\cdots,o_j},j}(x)^2\,dx$$

1. $(o_1,\cdots,o_j) \mapsto e_{a_{o_1,\cdots,o_j},j}(x)^2$ par différence finie.
2. Détermination du multiplicateur de Lagrange τ en utilisant un réarrangement.
3. Calcul de $\Gamma(o_1,\cdots,o_j)$ par intégration numérique.
4. Minimisation de Γ en utilisant un algorithme génétique.